

Komplexe Zahlen (2)

mündliche Aufgaben

Aufgabe 2.1

$$\arg(2i) = ?$$

Aufgabe 2.1

$$\arg(2i) = 90^\circ = \pi/2$$

Aufgabe 2.2

$$\arg(-12.7) = ?$$

Aufgabe 2.2

$$\arg(-12.7) = 180^\circ = \pi$$

Aufgabe 2.3

$$\arg(3 + 3i) = ?$$

Aufgabe 2.3

$$\arg(3 + 3i) = 45^\circ = \pi/4$$

Aufgabe 2.4

In welchem Quadranten liegt $-2 + 3i$?

Aufgabe 2.4

$-2 + 3i$ liegt im 2. Quadranten

Aufgabe 2.5

Was bedeutet cis φ ?

Aufgabe 2.5

$$\text{cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Aufgabe 2.6

$$2 \operatorname{cis}(3\pi/2) = ?$$

Aufgabe 2.6

$$2 \operatorname{cis}(3\pi/2) = 2 \operatorname{cis}(270^\circ) = -2i$$

Aufgabe 2.7

Vereinfache: $\text{cis } 40^\circ \cdot \text{cis } 30^\circ$

Aufgabe 2.7

$$\text{cis}(40^\circ) \cdot \text{cis}(30^\circ) = \text{cis}(70^\circ)$$

Aufgabe 2.8

Vereinfache: $2 \operatorname{cis}(40^\circ) \cdot 5 \operatorname{cis}(50^\circ)$

Aufgabe 2.8

$$2 \operatorname{cis}(40^\circ) \cdot 5 \operatorname{cis}(50^\circ) 10 \operatorname{cis}(90^\circ) = 10i$$

Aufgabe 2.9

Vereinfache: $12 \operatorname{cis}(4\pi/7) : 3 \operatorname{cis}(3\pi/7)$

Aufgabe 2.9

$$12 \operatorname{cis}(4\pi/7) : 3 \operatorname{cis}(3\pi/7) = 4 \operatorname{cis}(\pi/7)$$

Aufgabe 2.10

Vereinfache $z = \operatorname{cis}(60^\circ) : \operatorname{cis}(70^\circ)$ ($0 \leq \arg(z) < 360^\circ$)

Aufgabe 2.10

$$\operatorname{cis}(60^\circ) : \operatorname{cis}(70^\circ) = \operatorname{cis}(-10^\circ) = \operatorname{cis}(-10^\circ + 360^\circ) = \operatorname{cis}(350^\circ)$$

Aufgabe 2.11

$$|\operatorname{cis}(\varphi)| = ?$$

Aufgabe 2.11

$$|\operatorname{cis}(\varphi)| = 1 \quad [\text{Beweis?}]$$

Aufgabe 2.12

Vereinfache: $\text{cis}(90^\circ) + \text{cis}(270^\circ)$

Aufgabe 2.12

$$\operatorname{cis}(90^\circ) + \operatorname{cis}(270^\circ) = i + (-i) = 0$$

Aufgabe 2.13

Vereinfache: $\text{cis}^6(15^\circ)$

$\text{cis}^n(x)$ ist eine Kurzschreibweise für $[\text{cis}(x)]^n$.

Aufgabe 2.13

$$\operatorname{cis}^6(15^\circ) = \operatorname{cis}(6 \cdot 15^\circ) = \operatorname{cis}(90^\circ) = i$$

Aufgabe 2.14

$$(1 + i)^6 = ?$$

Aufgabe 2.14

$$(1 + i)^6 = [\sqrt{2} \operatorname{cis}(45^\circ)]^6 = 2^3 \operatorname{cis}(270^\circ) = -8i$$

Aufgabe 2.15

Welcher geometrischen Abbildung entspricht die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der Zahl $2i$?

Aufgabe 2.15

Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der Zahl $2i$ entspricht einer Drehstreckung mit dem Faktor 2 und dem Drehwinkel 90° .

Aufgabe 2.16

Was bedeutet $e^{i\varphi}$?

Aufgabe 2.16

$$e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)?$$

Aufgabe 2.17

$$e^{i\pi} + 1 = ?$$

Aufgabe 2.17

$$e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Aufgabe 2.17

$$e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Diese Gleichung wird eulersche Identität genannt und vereinigt fünf der wichtigsten mathematischen Konstanten in einer Gleichung

Aufgabe 2.18

$$3e^{2i} \cdot 4e^i = ?$$

Aufgabe 2.18

$$3e^{2i} \cdot 4e^i = 12e^{3i}$$

Aufgabe 2.19

$$24e^{2i} : 8e^i = ?$$

Aufgabe 2.19

$$24e^{2i} : 8e^i = 3e^i$$

Aufgabe 2.20

$$\sqrt[2]{16e^{4.84i}} = ?$$

Aufgabe 2.20

$$\sqrt[2]{16e^{4.84i/2}} = 4e^{2.42i}$$

Aufgabe 2.21

Gib $\arg(e^i)$ im Gradmass an.

Aufgabe 2.21

$$\arg(e^i) = \arg(e^{i \cdot 1}) = 1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

Aufgabe 2.22

Nenne möglichst viele verschiedene Anwendungen der komplexen Zahlen.

Aufgabe 2.22

- ▶ Lösung von Gleichungen des Typs $x^2 + c = 0$ mit $c > 0$
- ▶ Algebraische Darstellung geometrischer Abbildungen in der gaußschen Zahlenebene (Translationen, Drehungen, Streckungen)
- ▶ Erweiterung des Definitionsbereichs von Funktionen (Wurzel-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen)
- ▶ Einfache Herleitung von Formeln, die $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, ... durch Produkte von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ausdrücken
- ▶ Zeigermodell in der Physik (z. B. Wechselstromlehre)