Aufgabe 1

Eine Permutation ist eine bijektive (umkehrbar eindeutige) Abbildung von n Elementen auf sich selber.

(a) ja

(b) ja

(c) nein

(d) ja

(e) ja

(f) nein

Aufgabe 2

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (135)(246)$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1)(25)(364)$

(c) $(1643)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $(14)(56)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

(a) $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

(a) $q \circ p = (14)(235) \circ (152)(43) = (12453)$

(b) $p \circ q = (152)(43) \circ (14)(235) = (13245)$

Aufgabe 5

(a) $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $p = (14)(235) \quad \Rightarrow \quad p^{-1} = (41)(325) = (14)(253)$

Aufgabe 6

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(a) $p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) Für p^{2n} sind die letzten beiden Elemente Fixpunkte und für p^{3n} sind die ersten drei Elemente Fixpunkte.

Also gilt: $p^{6n} = \mathrm{id}$ und damit:

$p^{59} = p^{53} = \cdots = p^5 = p^2 \circ p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p^{-2} = p^{-1} \circ p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Weiter probieren:

$p^{-3} = p^{-1} \circ p^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ [verwende z. B. (b)]

$p^{-4} = p^{-1} \circ p^{-3} \overset{\text{oder}}{=} p^{-2} \circ p^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$

Also: $p^{-43} = p^{-40} = \cdots = p^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Löse die Gleichung „in gewohnter Weise" nach x auf:

$$\begin{aligned} a \circ x &= b && \|\text{ von links mit } a^{-1} \text{ verknüpfen} \ldots \\ a^{-1} \circ a \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Assoziativgesetz anwenden} \ldots \\ (a^{-1} \circ a) \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Eigenschaft des Inversen} \ldots \\ \mathrm{id} \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Eigenschaft des neutralen Elements} \ldots \\ x &= a^{-1} \circ b \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= a^{-1} \circ b \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

- Abgeschlossenheit:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{-i}$
$\mathbf{1}$	1	-1	i	$-\mathrm{i}$
$\mathbf{-1}$	-1	1	$-\mathrm{i}$	i
$\mathbf{i}$	i	$-\mathrm{i}$	-1	1
$\mathbf{-i}$	$-\mathrm{i}$	i	1	$-\mathrm{i}$

- Assoziativität: gilt in $\mathbb{C}$; also auch in $(M, \cdot)$

- neutrales Element: 1

- inverse Elemente:

  $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$, $(-\mathrm{i})^{-1} = \mathrm{i}$

Aufgabe 10

(a) $a^2 = a$, $a^3 = a$, $\ldots$, $a^{99} = a$

(b) $b^2 = a$
$b^3 = b^2 * b = a * b = b$
$b^4 = b^3 * b = b * b = a$
$\ldots$
$b^{99} = b$

(c) $(a * b)^1 = b$
$(a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = b * b = a$
$(a * b)^3 = (a * b)^2 * (a * b) = a * b = b$
$(a * b)^4 = (a * b)^3 * (a * b) = b * b = b$
$\ldots$
$(a * b)^{99} = b$

(d) kommutativ (Die Tabelle ist symmetrisch zur Diagonalen.)

(e) nicht assoziativ $[(a * c) * b = b \neq a = a * (c * b)]$

Aufgabe 11

- $*$ ist abgeschlossen: ja (siehe Tabelle)
- $*$ ist assoziativ: ja (nach Voraussetzung)
- neutrales Element: a, denn nur für a gilt: $a * a = a$
- inverse Elemente:
  $a^{-1} = a$
  $b^{-1} = b$
  $c^{-1} = c$
  $d^{-1} = d$
- abelsch: ja

Aufgabe 12

- $*$ ist abgeschlossen: ja (siehe Tabelle)
- $*$ ist assoziativ: ja (nach Voraussetzung)
- neutrales Element: c ist Kandidat, denn für alle $x \in M$ gilt: $x * c = c * x$.
- inverse Elemente: a^{-1} existiert nicht

Also handelt es sich nicht um eine Gruppe

Aufgabe 13

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Wegen $a * a = a$ muss a das neutrale Element sein.

In jeder Zeile und Spalte darf ein Element nur einmal vorkommen.

Aufgabe 14

(a) $17 \equiv 39 \pmod 3$ falsch

(b) $-21 \equiv 67 \pmod 4$ wahr

(c) $34 \equiv 254 \pmod{10}$ wahr

(d) $-9 \equiv 99 \pmod{10}$ falsch

Aufgabe 15

(a) $[8]+[7]=[4]$

(b) $[3]+(-[9])=[3]+[10]=[2]$

(c) $[5]\cdot[8]=[7]$

(d) $[6]:[10]=[6]\cdot([10]^{-1})=[6]\cdot[10]=[5]$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 16

(a) $[2]^0=[1]$

(b) $[2]^1=[2]$

(c) $[2]^2=[4]$

(d) $[2]^3=[8]$

(e) $[2]^4=[6]$

(f) $[2]^5=[2]$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 17

(a) $[7]^0=[1]$

(b) $[7]^1=[7]$

(c) $[7]^2=[9]$

(d) $[7]^3=[3]$

(e) $[7]^4=[1]$

(f) $[7]^5=[7]$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 18

(a) $[3]^{-1}=[2]$

(b) $[3]^{-2}=[4]$

(c) $[3]^{-3}=[3]$

(d) $[3]^{-4}=[1]$

(e) $[3]^{-5}=[2]$

(f) $[3]^{-103}=[3]^{-3}=[3]$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 19

neutrales Element: a

Element	Ordnung
a	1
b	3
c	3
d	2
e	2
f	2

Aufgabe 20

- Ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe?
  - die Addition ist assoziativ und kommutativ
  - $(0, 0, 0)$ ist das neutrale Element in $(M, +)$
  - $(-x_1, -x_2, -x_3)$ ist das inverse Element zu (x_1, x_2, x_3)
- $(M, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ
  - $(1, 1, 1)$ ist das neutrale Element in $(M, +)$
  - Es gibt nicht zu jedem $(x_1, x_2, x_3) \in M \backslash \{(0, 0, 0\}$ ein inverses Element. Beispiel: $(2, 3, 0) \neq (0, 0, 0)$ aber $(2, 3, 0)^{-1}$ existiert nicht.

Also handelt es sich nicht um einen Körper.