Aufgabe 1

Handelt es sich um eine Permutation?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} \heartsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit \\ \spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit & \heartsuit \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ e & a & g & f & a & b & c \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Eine Permutation kann kürzer in der Zyklenschreibweise dargestellt werden. Beispiele:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (152)(34)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13425)$

Stelle die Permutationen in der Zyklenschreibeweise dar:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Schreibe die Permutation in der Matrixdarstellung:

(c) $(1643)(25)$

(d) $(14)(56)(23)$

Aufgabe 3

Berechne mit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(a) $q \circ p$

(b) $p \circ q$

Aufgabe 4

Berechne mit $p = (152)(43)$ und $q = (14)(235)$

(a) $q \circ p$

(b) $p \circ q$

und stelle das Resultat in der Zyklenschreibweise dar.

Aufgabe 5

Berechne die Inverse Permutation p^{-1} von p:

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $p = (14)(235)$

Aufgabe 6

Berechne mit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(a) p^2

(b) p^3

(c) p^{59}

Aufgabe 7

Berechne mit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) p^{-1}

(b) p^{-2}

(c) p^{-43}

Aufgabe 8

Gegeben: $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Permutation x, so dass $a \circ x = b$

Aufgabe 9

Es sei $M = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ wobei i die imaginäre Einheit ist.

Erstelle eine Verknüpfungstabelle und zeige, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei „$\cdot$“ die übliche Multiplikation für komplexe Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 10

Die Operation $*$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ ist durch die folgenden Verknüpfungstabelle gegeben:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	a
b	b	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

(a) $a^{99} = ?$

(b) $b^{99} = ?$

(c) $(a * b)^{99} = ?$

(d) Ist $*$ kommutativ? Wenn nein, gib ein Gegenbeispiel an.

(e) Ist $*$ assoziativ? Wenn nein, gib ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 11

Die durch die Verknüpfungstabelle definierte Operation $*$ ist assoziativ. Untersuche, ob es sich um eine (abelsche) Gruppe handelt.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Aufgabe 12

Die durch die Verknüpfungstabelle definierte Operation $*$ ist assoziativ. Untersuche, ob es sich um eine Gruppe handelt und wenn ja, ob diese abelsch ist.

$*$	a	b	c	d
a	a	d	a	d
b	d	a	b	a
c	a	b	c	d
d	d	a	d	a

Aufgabe 13

Vervollständige die Verknüpfungstafel, so dass eine Gruppe entsteht:

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				

Aufgabe 14

Wahr oder falsch?

(a) $17 \equiv 39 \pmod 3$

(b) $-21 \equiv 67 \pmod 4$

(c) $34 \equiv 254 \pmod{10}$

(d) $-9 \equiv 99 \pmod{10}$

Aufgabe 15

Berechne in $\mathbb{Z}_{11}$:

(a) $[8] + [7]$

(b) $[3] - [9]$

(c) $[5] \cdot [8]$

(d) $[6] : [10]$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 16

Berechne in $\mathbb{Z}_{10}$.

(a) $[2]^0$

(b) $[2]^1$

(c) $[2]^2$

(d) $[2]^3$

(e) $[2]^4$

(f) $[2]^5$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 17

Berechne in $\mathbb{Z}_{10}$.

(a) $[7]^0$

(b) $[7]^1$

(c) $[7]^2$

(d) $[7]^3$

(e) $[7]^4$

(f) $[7]^5$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 18

Berechne in $\mathbb{Z}_5$

(a) $[3]^{-1}$

(b) $[3]^{-2}$

(c) $[3]^{-3}$

(d) $[3]^{-4}$

(e) $[3]^{-5}$

(f) $[3]^{-100}$

(Hinweis: $[r]$ ist eine andre Schreibweise für $\overline{r}$)

Aufgabe 19

Die Ordnung eines Gruppenelements $g \in G$ ist die kleinste natürliche Zahl n für die $g^n = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{n \text{ Faktoren}} = e$ gilt.

Bestimme die Ordnung aller Elemente der sogenannten *Diedergruppe* D_6. Beachte, dass hier e nicht das neutrale Element bezeichnen muss.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	e	f	d
c	c	a	b	f	d	e
d	d	f	e	a	c	b
e	e	d	f	b	a	c
f	f	e	d	c	b	a

Aufgabe 20

Für die Elemente der Menge $M = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ sind die folgenden Verknüpfungen definiert.

- Addition: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- Multiplikation: $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3)$

Wobei auf der rechten Seite „+“ und „·“ die in $\mathbb{R}$ üblichen Operationen bezeichnen.

Beurteile, ob ob $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist, indem du überprüfst, ob alle Kriterien eines Körpers erfüllt sind.