Aufgabe 12.1

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

  keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

x		-6	9	-4
1	1	-5	4	0
1	1	-4	0	
4	1	0		

  $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 4$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -4$

- *Ableitungen:*

  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
  $f''(x) = 6x^2 - 12$
  $f'''(x) = 6$

- *Extrempunkte:*

  $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

  $f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(1, 0)$

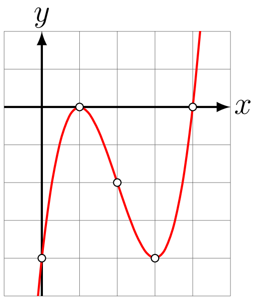
  $f''(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(3, -4)$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$f'''(2) = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(2, -2)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.2

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

  keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

x					
		0	−6	8	−3
1	1	1	−5	3	0
1	1	2	−3	0	
1	1	3	0		
−3	1	0			

$x_1 = x_2 = x_3 = 1,\ x_3 = 3$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -3$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$f'''(x) = 24x$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 - 12x + 8 &= 0 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

x		0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	
-2	1	0		

$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ TeP?

$f''(-2) = 12 \cdot 4 - 12 = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ TiP$(-2, -27)$

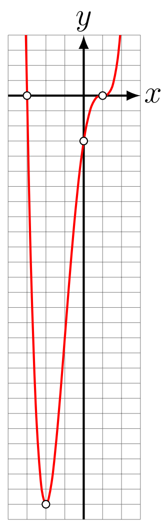
- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ TeP$(1, 0)$

$f'''(-1) = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ WeP$(-1, -16)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.3

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)
- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = -4$ (mit Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + 3x) : (x + 4) = x - 1 + \dfrac{4}{x + 4}$

  Asymptote: $g(x) = x - 1$
- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x + 3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{0}{0 + 4} = 0$
- *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3)(x + 4) - (x^2 + 3x)}{(x + 4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 11x + 12 - x^2 - 3x}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 12}{(x + 4)^2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x + 8)(x + 4)^2 - (x^2 + 8x + 12) \cdot 2(x + 4)}{(x + 4)^4} \\ &= \frac{(2x + 8)(x + 4) - 2(x^2 + 8x + 12)}{(x + 4)^3} \\ &= \frac{2x^2 + 16x + 32 - 2x^2 - 16x - 24}{(x + 4)^3} = \frac{8}{(x + 4)^3} \end{aligned}$$

  Da die 2. Ableitung offensichtlich keine Nullstellen hat, wird das Berechnen der 3. Ableitung obsolet.
- *Extrempunkte:*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{x^2+8x+12}{(x+4)^2} &= 0 \\
x^2+8x+12 &= 0 \quad (x \neq -4) \\
(x+2)(x+6) &= 0 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= -6
\end{aligned}
$$

$$f''(-2) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, -1)$$

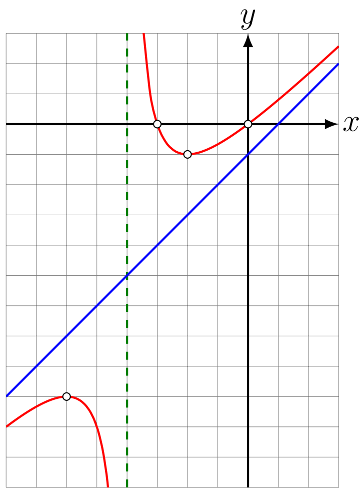
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{8}{(x+4)^3} &= 0 \\
8 &= 0
\end{aligned}
$$

keine Lösung; also keine Wendepunkte

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.4

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x-4)^2}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \dfrac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

- *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\ &= \frac{-9(x-4) + 9x \cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x + 36}{(x-4)^4} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8} \\ &= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x - 216}{(x-4)^5} \end{aligned}$$

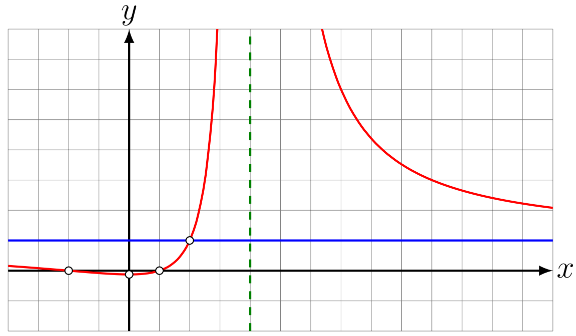
- *Extrempunkte:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$
$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(-2, 0)$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.5

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-4)^2}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \dfrac{7x+18}{x^2 - 8x + 16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}$$
$$= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3}$$
$$= \frac{2x^2-7x-4-2x^2-2x+4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6}$$
$$= \frac{-9(x-4)+9x\cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x+36}{(x-4)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8}$$
$$= \frac{18(x-4)-4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x-216}{(x-4)^5}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$

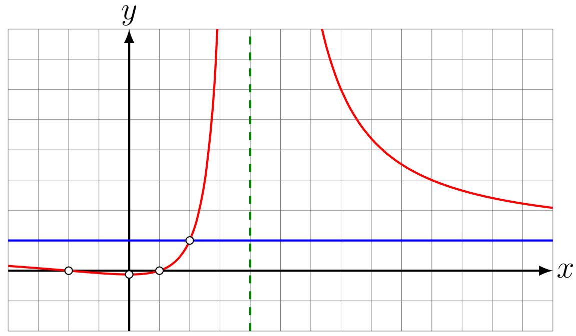
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 12.6

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-4)^2}$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- *Symmetrie:* keine

  (Monome mit geraden und ungerade Exponenten)
- *asymptotisches Verhalten:*

  vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

  Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \dfrac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$

  horizontale Asymptote: $g(x) = 1$
- *Nullstellen:*
$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$
- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$
- *Ableitungen:*
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x)\cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\ &= \frac{-9(x-4) + 9x \cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x + 36}{(x-4)^4} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{18(x-4)^4 - (18x+36)\cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8}$$

$$= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x-216}{(x-4)^5}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(0, -1/8)$$

$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)