Aufgabe 11.1

Ableitungen:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = 2x - 6$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(3, -1)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung

keine Wendepunkte

Aufgabe 11.2

Ableitungen:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

$f'''(x) = 12$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ 6(x^2 - x - 2) &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$f''(-1) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(-1, -11)$

$f''(2) = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(2, -38)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x - 6 &= 0 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$f'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}\left(\frac{1}{2}, -\frac{49}{2}\right)$

Aufgabe 11.3

Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

$f'(x) = x^2 - 2x + 1$

$f''(x) = 2x - 2$

$f'''(x) = 2$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$f''(1) = 0 \ldots$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}\big(1, \frac{4}{3}\big)$

Aufgabe 11.4

Ableitungen:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$
$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$$
$$f''(x) = 12x^2 + 24x$$
$$f'''(x) = 24x + 24$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 12x^2 - 16 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - 4 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 = x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem Hornerschema oder Polynomdivision erhält man
$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$
und damit die zweite Lösung

$$f''(1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -31)$$

$$f''(-2) = 48 - 48 = 0 \ \ldots$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 + 24x &= 0 \\ 12x(x+2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0, -20)$$

$$f'''(-2) = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(-2, -4)$$

Aufgabe 11.5

Ableitungen:

$f(x) = x^5 + 15x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$

$f''(x) = 20x^3 + 90x$

$f'''(x) = 60x^2 + 90$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 5x^4 + 45x^2 &= 0 \\ 5x^2(x^2 + 9) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f''(0) = 0 \ldots$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 20x^3 + 90x &= 0 \\ 10x(2x^2 + 9) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f'''(0) = 90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TeP}(0,0)$

Aufgabe 11.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^4}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + 3 + \frac{4}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 4 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ kann durch systematisches Probieren gefunden werden (nichtnegative Lösungen kann man gleich ausschliessen):

x		3	0	4
-1	2	1	-1	5
-2	2	-1	2	0

somit: $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$

Der quadratische Faktor hat die Diskriminante $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$ und liefert keine weiteren Lösungen.

$$f''(-2) = 2 - \frac{8}{-8} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, 0)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 - \frac{8}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 - 8 &= 0 \\ x^3 &= 4 \\ x &= 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$f'''\left(4^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$f\left(4^{\frac{1}{3}}\right) = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{WeP}\left(\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{4}\right)$$

Aufgabe 11.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)-(x^2-5)}{(x-3)^2} = \cdots = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= \frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x+5)}{(x-3)^3} \\
&= \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3} \\
&= \frac{8}{(x-3)^3}
\end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} &= 0 \\
x^2-6x+5 &= 0 \quad (x \neq 3) \\
(x-1)(x-5) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 5
\end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1-3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \text{ } (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1^2-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1,2)$$

$$f''(5) = \frac{8}{(5-3)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \text{ } (x = 1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(5) = \frac{5^2-5}{5-3} = \frac{20}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(5,10)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{8}{(x-3)^3} &= 0 \\
8 &= 0 \quad (x \neq 3)
\end{aligned}$$

keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ keine Wendepunkte

Aufgabe 11.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-7)^2 - (x-4) \cdot 2(x-7)}{(x-7)^4} = \cdots = \frac{1-x}{(x-7)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x-7)^3 - (1-x) \cdot 3(x-7)^2}{(x-7)^6} = \cdots = \frac{2x+4}{(x-7)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2(x-7)^4 - (2x+4) \cdot 4(x-7)^3}{(x-7)^8} = \cdots = \frac{-6x-30}{(x-7)^5}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1-x}{(x-7)^2} &= 0 \\ 1-x &= 0 \quad (x \neq 7) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \text{ } (x = 1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1-4}{(1-7)^2} = \frac{-3}{6^2} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\big(1, -\tfrac{1}{12}\big)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{2x+4}{(x-7)^4} &= 0 \\ 2x+4 &= 0 \quad (x \neq 7) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = \frac{-6 \cdot (-2) - 30}{(2-7)^5} = \frac{-18}{(-9)^5} = \frac{2}{9^4} \neq 0 \text{ } (x = -2 \text{ ist Wendestelle})$$

$$f(2) = \frac{-2-4}{(-2-7)^2} = \frac{-6}{(-9^2)} = -\frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}\big(2, -\tfrac{2}{27}\big)$$

Aufgabe 11.9

Ableitungen:

$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2x + \dfrac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = 2 - 2x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x\sqrt{x} + 2 = 0$$

keine Lösung $\quad\Rightarrow\quad$ keine Extrempunkte

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 - 2x^{\frac{3}{2}} &= 0 \\ 1 &= x^{\frac{3}{2}} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 3 \cdot 1^{\frac{-5}{2}} = 3 \neq 0$

$f'(1) = 1^2 + 8\sqrt{1} = 9$

WeP$(1, 9)$

Aufgabe 11.10

Ableitungen:

$f(x) = x\mathrm{e}^x$

$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$

$f''(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$

$f'''(x) = \mathrm{e}^x + (x+2)\mathrm{e}^x = (x+3)\mathrm{e}^x$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x+1)\mathrm{e}^x &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$f''(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}\big(-1, -\mathrm{e}^{-1}\big)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x+2)\mathrm{e}^x &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$f'''(-2) = (-2+3)\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}\big(-2, -\mathrm{e}^{-2}\big)$

Aufgabe 11.11

Ableitungen:

$f(x) = (x^2 - 4x + 5)\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = (2x - 4)\mathrm{e}^{-x} - (x^2 - 4x + 5)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2 + 6x - 9)\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x) = (-2x + 6)\mathrm{e}^{-x} - (-x^2 + 6x - 9)\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 8x + 15)\mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = (2x - 8)\mathrm{e}^{-x} - (x^2 - 8x + 15)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2 + 10x - 23)\mathrm{e}^{-x}$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (-x^2 + 6x - 9)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3) &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$f''(3) = (3^2 - 8 \cdot 3 + 15)\mathrm{e}^{-3} = 0 \ldots (\rightarrow \text{Wendepunkte})$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x^2 + 6x - 9\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 5)(x - 3)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$f'''(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3 - 23)\mathrm{e}^{-3} = -2\mathrm{e}^{-3} \neq 0$

$f(3) = 2\mathrm{e}^{-3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TeP}(3, 2\mathrm{e}^{-3})$

$f'''(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5 - 23)\mathrm{e}^{-5} = 2\mathrm{e}^{-5} \Rightarrow \mathrm{WeP}(5, 10\mathrm{e}^{-5})$

Aufgabe 11.12

Ableitungen:

$f(x) = x - \ln(x)$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f'''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1 - \frac{1}{x} &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$f''(1) = \dfrac{1}{1^2} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(1,1)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{1}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ keine Wendepunkte

Aufgabe 11.13

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot 1/x}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln^4 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x} + \frac{2}{x \ln^3 x}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{x^2 \ln^4 x} \left(1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2 \ln^6 x} \left(1 \cdot \ln^3 x + x \cdot 3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2 \ln^2 x} + \frac{2}{x^2 \ln^3 x} - \frac{2}{x^2 \ln^3 x} - \frac{6}{x^2 \ln^4 x} \\ &= \frac{1}{x^2 \ln^2 x} - \frac{6}{x^2 \ln^4 x} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} &= 0 \\ \ln x - 1 &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ x &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

$$f''(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(\mathrm{e}, \mathrm{e})$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x} &= 0 \\ -\ln x + 2 &= 0 \\ \ln x &= 2 \\ x &= \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

$$f'''(\mathrm{e}^2) = \frac{1}{4\mathrm{e}^2} - \frac{6}{16\mathrm{e}^2} = \frac{2}{8\mathrm{e}^2} - \frac{3}{8\mathrm{e}^2} = -\frac{1}{8\mathrm{e}^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{WeP}\big(\mathrm{e}^2, \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\big)$$

Aufgabe 11.14

Ableitungen:

$f(x) = \cos 3x + 1$

$f(x) = -3\sin 3x$

$f''(x) = -9\cos 3x$

$f'''(x) = 27\sin 3x$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3\sin 3x &= 0 \\ \sin 3x &= 0 \\ 3x &= k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x_k &= \frac{1}{3}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$f''(x_k) = -9\cos\big(k\pi\big) = \begin{cases} -9 & \text{wenn } k \text{ gerade (HoP)} \\ +9 & \text{wenn } k \text{ ungerade (TiP)} \end{cases}$$

$$f(x_k) = \cos\big(k\pi\big) + 1 = \begin{cases} 2 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$ gerade: $\mathrm{HoP}\big(\frac{1}{3}k\pi, 2\big)$
$k \in \mathbb{Z}$ ungerade: $\mathrm{TiP}\big(\frac{1}{3}k\pi, 0\big)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -9\cos(3x) &= 0 \\ \cos(3x) &= 0 \\ 3x_k &= \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \\ x_k &= \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}k\pi \end{aligned}$$

$$f'''(x_k) = 27\sin\big(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi\big) = \begin{cases} +1 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f(x_k) = \cos\big(\frac{1}{2}\pi + k\pi\big) + 1 = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{WeP}\big(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi, 1\big)$

Aufgabe 11.15

Ableitungen:

$f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 1 + \cos x &= 0 \\ \cos x &= -1 \\ x_k &= (2k-1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$f''(x_k) = -\sin\big((2k-1)\pi\big) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ mögliche Terrassenstellen

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -\sin(x) &= 0 \\ x_k &= k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$f'''(x_k) = -\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & k \text{ gerade} \\ +1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f(x_k) = k\pi + \sin(k\pi) = k\pi$

$\text{TeP}\big(k\pi, k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$