Aufgabe 10.1

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$
\begin{array}{lcl}
f^{(0)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(0)}(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -\sin x & \Rightarrow & f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos x & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 0 \\
\quad \ldots = \ldots & \Rightarrow & \quad \ldots = \ldots
\end{array}
$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \ldots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.2

(a)
$$
\begin{array}{lcl}
f^{(0)}(x) = \ln x & \Rightarrow & f^{(0)}(1) = 0 \\
f^{(1)}(x) = x^{-1} & \Rightarrow & f^{(1)}(1) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -x^{-2} & \Rightarrow & f^{(2)}(1) = -1 \\
f^{(3)}(x) = 2x^{-3} & \Rightarrow & f^{(3)}(1) = 2 = 2! \\
f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & \Rightarrow & f^{(4)}(1) = -6 = -3! \\
f^{(5)}(x) = 24x^{-5} & \Rightarrow & f^{(5)}(1) = 24 = 4! \\
\quad \ldots\ldots & \Rightarrow & \quad \ldots = \ldots
\end{array}
$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\ln(x) &= 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x-1)^3 - \ldots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}
$$

mit der Substitution $x - 1 \to x$ erhält man:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Bei der letzte Umformung wird die Summe bei $k = 1$ statt bei $k = 0$ gestartet, weshalb im allgemeinen Summanden zum Ausgleich k durch $k - 1$ ersetzt werden muss. Dies führt zu einer etwas einfachere Formel. Beachte $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

(b) $\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

erst zwei signifikante Stellen.

Aufgabe 10.3

$f^{(0)}(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \frac{1}{2}$

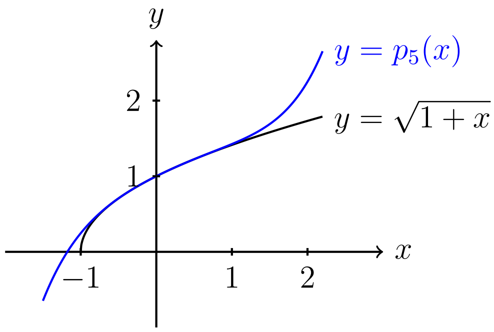
$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4}$

$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$

$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}(1+x)^{-\frac{9}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = \frac{105}{32}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}x^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}x^4 + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots$$


y
$y = p_5(x)$
$y = \sqrt{1+x}$
2
1
x
-1
1
2

Aufgabe 10.4

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \mathrm{e}^x \\
x^2 &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\
6x^2 &\approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3 \\
0 &\approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6 \\
x &\approx -0.69889
\end{aligned}
$$

Zum Vergleich die „exakte“ Lösung: -0.7035

Aufgabe 10.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.6

$$
\begin{aligned}
p(x) = p(1) &+ p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\
&+ \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 && \Rightarrow & p(1) &= 8 \\
p'(x) &= 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 && \Rightarrow & p'(1) &= 17 \\
p''(x) &= 12x^2 + 18x + 2 && \Rightarrow & p''(1) &= 32 \\
p'''(x) &= 24x + 18 && \Rightarrow & p'''(1) &= 42 \\
p^{(4)}(x) &= 24 && \Rightarrow & p^{(4)}(1) &= 24
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 8 + 17(x-1) + \frac{32}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 \\
&= (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 17(x-1) + 8
\end{aligned}
$$