Aufgabe 5.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x+1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

(c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$

(d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

(e) $f(-5) = 4 \cdot (-5) + 1 = -19$

Aufgabe 5.2

Ja, da alle Polynomfunktionen stetig sind.

Aufgabe 5.3

Ja, denn

- $f(0) = \sqrt{0^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

Aufgabe 5.4

Nein, da

- $f(-1) = 1/(-1+1) = 1/0$ nicht definiert ist

Aufgabe 5.5

Ja, denn es handelt sich um eine Verkettung zweier stetiger Funktionen.

Aufgabe 5.6

Ja, denn

- $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 4x - 5 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x+1) = 7$

Aufgabe 5.7

Ja, denn

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$

Aufgabe 5.8

Nein, denn

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$

Aufgabe 5.9

f ist stetig auf dem ganzen Definitionsbereich ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) stetig.

Aufgabe 5.10

Die Funktion f ist nicht stetig an der Stelle $x = 3$

Aufgabe 5.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2^-} f(x) &= \lim_{x\to2^+} f(x) \\
\lim_{x\to2^-} (2x^2+3x+1) &= \lim_{x\to2^+} (x^3+ax-4) \\
8+6+1 &= 8+2a-4 \\
11 &= 2a \\
a &= 5.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (x+1) = 1$

$f(0) = 1 \quad$ (ok)

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$x \leq 0$: $f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$x > 0$: $f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \quad$ (ok)

$\Rightarrow$ f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 5.13

Die Funktionswerte der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned} f(4) &= \lim_{x \to 4^-} f(x) \\ 2a + b &= 16 + 4b + a \\ a - 3b &= 16 \end{aligned}$$

Die Steigungen der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

für $x < 4$ gilt: $f'(x) = 2x + b$

für $x \geq 4$ gilt: $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \to 4^-} f'(x) \\ a/4 &= 8 + b \\ a &= 32 + 4b \\ a - 4b &= 32 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $\begin{vmatrix} a - 3b = 16 \\ a - 4b = 32 \end{vmatrix}$ hat die Lösung $a = -32$, $b = -16$