

Summen**Aufgabe 4.1**

$$f'(x) = 2x + 3x^2$$

Aufgabe 4.2

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

Aufgabe 4.3

$$f'(x) = 2 + \tan^2 x$$

Aufgabe 4.4

$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

Aufgabe 4.5

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 3x^2$$

Aufgabe 4.7

$$a'(z) = 1 + 2z + 3z^2$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 4.9

$$f'(x) = 1$$

Aufgabe 4.10

$$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-7}$$

konstante Faktoren

Aufgabe 4.11

$$f'(x) = 6x$$

Aufgabe 4.12

$$f'(x) = 5e^x$$

Aufgabe 4.13

$$f'(x) = -4 \cos x$$

Aufgabe 4.14

$$g'(x) = \pi \frac{1}{x}$$

Aufgabe 4.15

$$f'(x) = \sin x$$

Aufgabe 4.16

$$f'(x) = 0$$

Aufgabe 4.17

$$f'(t) = -\frac{5}{t^2}$$

Aufgabe 4.18

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 4.19

$$f'(x) = 2^x$$

Aufgabe 4.20

$$h'(s) = -15s^{-6}$$

Polynome

Aufgabe 4.21

$$f'(x) = 4x + 3$$

Aufgabe 4.22

$$f'(x) = 3x^2 - 14x$$

Aufgabe 4.23

$$f'(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$$

Aufgabe 4.24

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.25

$$f'(x) = 3\sqrt{2}x^2 - 2\pi x + e$$

Aufgabe 4.26

$$g'(x) = 0.5x^4 - 0.75x^2 - 0.3$$

Aufgabe 4.27

$$f'(x) = 28x + 6$$

Aufgabe 4.28

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

Aufgabe 4.29

$$h(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow h'(x) = 2x + 4$$

Aufgabe 4.30

$$f(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3$$

Produkte

Aufgabe 4.31

$$\begin{aligned} f'(t) &= (6t + 1)(1 - t^2) + (3t^2 + t)(-2t) \\ &= \dots = -12t^3 - 3t^2 + 6t + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.32

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 + 2x)(x^3 + 4x - 3) + (1 + 3x + x^2)(3x^2 + 4) \\ &= \dots = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x - 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.33

$$g'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

Aufgabe 4.34

$$f'(t) = 2t \cdot \sin t + (t^2 - 1) \cdot \cos t$$

Aufgabe 4.35

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x \stackrel{\text{Trig.}}{=} \cos(2x)$$

Aufgabe 4.36

$$h'(t) = (-\sin t) \cdot \cos t + \cos t \cdot (-\sin t) = -2 \sin t \cdot \cos t \stackrel{\text{Trig.}}{=} -2 \sin(2t)$$

Aufgabe 4.37

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Aufgabe 4.38

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

Aufgabe 4.39

$$h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

Aufgabe 4.40

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x + \tan x \cdot (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \sin x$$

Quotienten

Aufgabe 4.41

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 4.42

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4.43

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

Aufgabe 4.44

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x} = x^2 + 2x - \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 2 + \frac{4}{x^2}$$

$$\text{Zur Erinnerung: } \left[\frac{1}{x} \right]' = [x^{-1}]' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 4.45

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x+5) - x^4 + 3x^2 + 2}{(x+5)^2} = \dots = \frac{3x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 30x - 2}{(x+5)^2}$$

Aufgabe 4.46

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+3x+2) - (x^2-2x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\ &= \frac{[2x^3+6x^2+4x-2x^2-6x-4] - [2x^3+3x^2-4x^2-6x+2x+3]}{(x^2+3x+2)^2} \\ &= \frac{[2x^3+4x^2-2x-4] - [2x^3-x^2-4x+3]}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{5x^2+2x-7}{(x^2+3x+2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.47

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(e^x \cdot x - 2 \cdot e^x)}{x^4} \\ &= \frac{e^x \cdot x - 2 \cdot e^x}{x^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.48

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{oder: } f'(x) = \dots = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Aufgabe 4.49

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Aufgabe 4.50

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot e^x - (x \cdot \ln x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{(\ln x + 1)e^x - x \cdot \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(\ln x + 1 - x \cdot \ln x)}{(e^x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x \cdot \ln x}{e^x} \end{aligned}$$

Verkettungen

Aufgabe 4.51

$$f'(x) = 7 \cdot (5x - 3)^6 \cdot 5 = 35 \cdot (5x - 3)^6$$

Aufgabe 4.52

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$$

Aufgabe 4.53

$$f'(x) = -e^{-x}$$

Aufgabe 4.54

$$f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x)} \quad [= 4 + 4 \tan^2(4x)]$$

Aufgabe 4.55

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$$

Aufgabe 4.56

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$$

Aufgabe 4.57

$$f'(x) = (-1) \cdot (-\sin(-x)) = \sin(-x) \stackrel{\text{Trig.}}{=} -\sin x$$

Aufgabe 4.58

$$f'(x) = 2x \cdot (-\sin(x^2)) = -2x \cdot \sin(x^2)$$

Aufgabe 4.59

$$f'(x) = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x + 1)$$

Aufgabe 4.60

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x \stackrel{\text{Trig.}}{=} \sin(2x)$$

Vermischte Aufgaben

Aufgabe 4.61

$$f'(x) = 10x - 3e^x + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 4.62

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Aufgabe 4.63

$$f'(x) = \cos x \cdot 2 \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$$

Aufgabe 4.64

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 4.65

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3+1) \cdot \ln x + (x^4+x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (4x^3+1) \cdot \ln x + x^3+1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.66

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Aufgabe 4.67

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Aufgabe 4.68

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6} \\ &= \frac{x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.69

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 4.70

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

Aufgabe 4.71

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

Aufgabe 4.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot [1 + \tan^2(5x + \pi)] \\ &= 5 + 5 \tan^2(5x + \pi) = 5 + 5 \tan^2(5x) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Vereinfachungen folgen aus den Reduktionsformeln für $x + \pi$: (FTB S. 99)

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

Aufgabe 4.73

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Aufgabe 4.74

$$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$$

Aufgabe 4.75

$$f'(x) = e^x \cdot 2e^x = 2(e^x)^2 = 2e^{2x}$$

Aufgabe 4.76

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Aufgabe 4.77

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 14x) \cdot 8(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \\ &= 8(3x^2 - 14x)(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.78

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

oder

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Aufgabe 4.79

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

Aufgabe 4.80

$$f'(x) = 2 \cdot e \cdot x + \frac{1}{e^2 \cdot x^2}$$

Aufgabe 4.81

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x^3}{4e^x} = \frac{3x^2 - x^3}{2e^x}$$

Aufgabe 4.82

$$f'(x) = \frac{2 \sin x}{(\cos x)^3}$$

Aufgabe 4.83

$$f'(x) = 2 \cos(2x)$$

Aufgabe 4.84

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} \ln(x+1) + e^{x^2+1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Aufgabe 4.85

$$f'(x) = -14 \cos x - 6x$$

Aufgabe 4.86

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2} - \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 4.87

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4} = \frac{4x}{x^4-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.88

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin x}$$

Aufgabe 4.89

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 10x + 15}{(x^2 + 3x)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 5}}$$

Aufgabe 4.90

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (x-a)(-a^{-1})e^{2-a^{-1}x} \\ &= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (1-a^{-1}x)e^{2-a^{-1}x} \\ &= (2-a^{-1}x)e^{2-a^{-1}x} \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Aufgabe 4.91

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Aufgabe 4.92

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

Aufgabe 4.93

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3x$$

$$f'''(x) = 6x$$

Aufgabe 4.94

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

Aufgabe 4.95

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x}$$

Aufgabe 4.96

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$