Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2 h}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin^2 h}-1\right)\left(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-\sin^2 h\right)-1}{h\left(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h\left(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\sqrt{1-\sin^2 h}+1}\\
&= 1\cdot\frac{0}{2}=0
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.2

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x}{h} \quad \text{(FBT S. 99)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin h}{h} \quad \text{(FBT S. 61)}\\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \quad \text{(FBT S. 61)}\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x \quad \text{(FTB S. 62)}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.3

$f'(x)=1/x \quad \Rightarrow \quad f'(5)=\frac{1}{5}$

Aufgabe 3.4

$f'(x)=5x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(-2)=5\cdot(-2)^4=5\cdot 16=80$

Aufgabe 3.5

$f'(x)=-\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi/2)=-\sin(\pi/2)=-1$

Aufgabe 3.6

$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = m_t$

$$\begin{aligned} t\colon y &= mx + q \\ 1 &= 1 \cdot 0 + q \\ q &= 1 \\ t\colon y &= x + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(2/3) = 3 \cdot (2/3)^2 = 3 \cdot 4/9 = 4/3 = m_t$

$m_n = -1/m_t = -3/4$

$$\begin{aligned} n\colon y &= mx + q \\ \frac{8}{27} &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q \\ \frac{8}{27} &= -\frac{1}{2} + q \\ q &= \frac{43}{54} \\ n\colon y &= -\frac{3}{4}x + \frac{43}{54} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

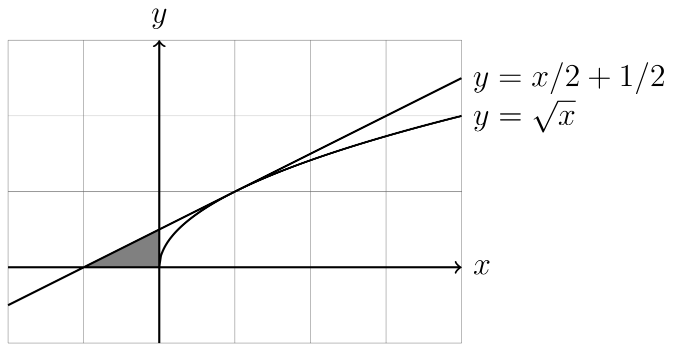
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + q \\ 1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \\ t\colon y &= \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ordinatenabschnitt von t: $q = \frac{1}{2}$

Nullstelle von t: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot |-1| \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



Aufgabe 3.9

$$f'(x) = -1/x^2 = -1.44$$
$$x^2 = 1/1.44$$
$$x = \pm 1/1.2 = \pm 1/(6/5) = \pm 5/6$$

Aufgabe 3.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(e) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$f'(-4) = -1/(-4)^2 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

Aufgabe 3.11

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \mathrm{e}^x$

(b) $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$

(c) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1/x^2$

(e) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$

Aufgabe 3.12

Die Steigungen von Tangente und Gerade müssen an der gesuchten Stelle übereinstimmen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.13

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57°$

(b) $f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2$

$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45°$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

$\varphi = \arctan(\mathrm{e}^{-2}) = 7.71°$

(d) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x$

$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30°$

(e) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$\varphi = \arctan(-\sin\frac{\pi}{6}) = -26.57°$