### Aufgabe 1.1

$$\lim_{x\to 2}(3x-7)=-1$$

### Aufgabe 1.2

$$\lim_{x\to \pi}\sin 3x=0$$

### Aufgabe 1.3

$$\lim_{x\to 0}(3x^2-4x+1)=1$$

### Aufgabe 1.4

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

### Aufgabe 1.5

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}2x=6$$

### Aufgabe 1.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^3}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x+2)^2=0$$

### Aufgabe 1.7

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

### Aufgabe 1.8

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x+2}=\lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x+2}=\lim_{x\to -\frac{2}{3}}(3x-2)=-4$$

### Aufgabe 1.9

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x-a)(x+a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}(x^2+a^2)(x+a)=4a^3\end{aligned}$$

## Aufgabe 1.10

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

## Aufgabe 1.11

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x-2} \\ &= \frac{0}{-4} \\ &= 0\end{aligned}$$

## Aufgabe 1.12

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^3-7x+6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x-2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-5$ | $2$ | $8$ |
| $2$ | $1$ | $-3$ | $-4$ | $0$ |

$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $0$ | $-7$ | $6$ |
| $2$ | $1$ | $2$ | $-3$ | $0$ |

$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$

$$\dots = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-3x-4)}{(x-2)(x^2+2x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} = -\frac{6}{5}$$

## Aufgabe 1.13

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 2$$

## Aufgabe 1.14

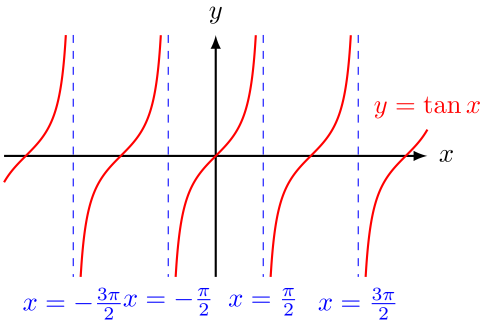
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

## Aufgabe 1.15

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

### Aufgabe 1.16

$\lim_{x \to \pi^+} \tan \frac{x}{2} = -\infty$




### Aufgabe 1.17

$\lim_{x \to \pi^-} \tan \frac{x}{2} = \infty$ (siehe Graph)

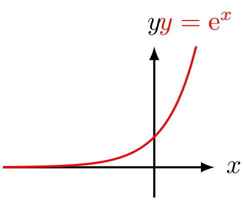
### Aufgabe 1.18

$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dots$

Aus $x \to 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \to -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\dots = \lim_{a \to -\infty} \mathrm{e}^a = 0$



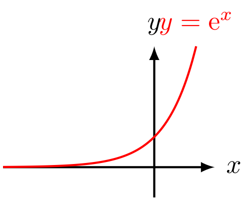

### Aufgabe 1.19

$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dots$

Aus $x \to 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \to +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\dots = \lim_{a \to +\infty} \mathrm{e}^a = \infty$



## Aufgabe 1.20

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

## Aufgabe 1.21

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, da die Folge sich von der positiven Seite der Null nähert.

## Aufgabe 1.22

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, wenn man dafür einen Vorzeichenwechsel durchführt, denn die Folge besteht nur aus negativen Werten.

## Aufgabe 1.23

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin \left( \left[ x - \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right) \sin \left( \left[ x + \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{- \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

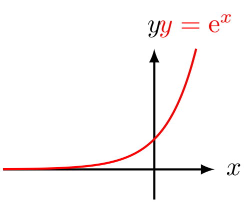
Substitution: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = a \qquad (\Leftrightarrow \ x = 2a + \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a \to 0} a = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to 0} \frac{- \sin(a) \sin \left( \frac{a + \pi/2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{a} &= \lim_{a \to 0} \left[ \frac{- \sin(a)}{a} \cdot \sin \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
&= -1 \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = -1 \cdot 1 = -1
\end{aligned}$$

## Aufgabe 1.24

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-1/x^2} = (\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$



**Aufgabe 1.25**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**Aufgabe 1.26**

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$$

**Aufgabe 1.27**

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

**Aufgabe 1.28**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3/x+1}{1} = \frac{0+1}{1} = 1$$

**Aufgabe 1.29**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1+2/x^2+1/x^2} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

**Aufgabe 1.30**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{5x-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+3/x}{5-9/x} = \frac{4}{5}$$

**Aufgabe 1.31**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+2}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+4/x+2/x^2}{2+1/x^2} = \frac{1}{2}$$

**Aufgabe 1.32**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2/x^2}{1} = \infty$$

**Aufgabe 1.33**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt{x}+1/x}{1+1/x} = 0$$

**Aufgabe 1.34**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2+1/x+1}{1} = 1$$

**Aufgabe 1.35**

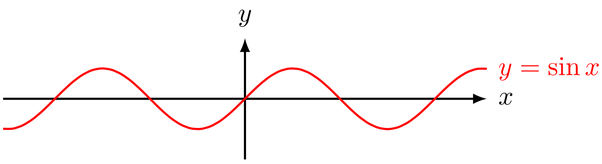
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x-x^2}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2+1/x-1}{2+3/x^2} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

**Aufgabe 1.36**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}/x}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+0}}{2} = \frac{1}{2}$$

**Aufgabe 1.37**

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ *existiert nicht*

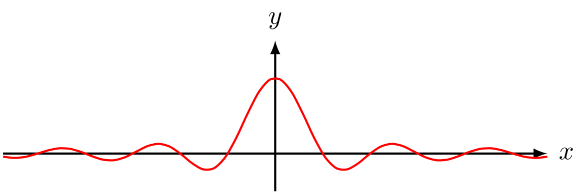



Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

**Aufgabe 1.38**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Da die Werte im Zähler zwischen $-1$ und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.




Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

**Aufgabe 1.39**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -1 = -1$$

Das Auflösen des Betrags ist möglich, da die Werte der Folge $x \to -\infty$ ab einem bestimmten Folgeglied $x_N$ immer negativ sein müssen.

**Aufgabe 1.40**

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^8}{2^x} = 0$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier $2^x$) mit zunehmendem $x$ schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier $x^8$).

**Aufgabe 1.41**

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^5} = \infty$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier $2^x$) mit zunehmendem $x$ schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier $x^5$).

**Aufgabe 1.42**

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

Dieser Grenzwert sollte bekannt sein.

(PAM-Formelsammlung S. 52).

**Aufgabe 1.43**

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{100} = 1$