Aufgabe 1.1

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-7x+8)=3-7+8=4$$

Aufgabe 1.2

$$\lim_{x\to\pi}\cos x=\cos\pi=-1$$

Aufgabe 1.3

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x=3$$

Aufgabe 1.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5-4x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^3-4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x^3-4)=-4$$

Aufgabe 1.5

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$$

Aufgabe 1.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+5)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+5)=3$$

Aufgabe 1.7

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}&=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{(x+3)(x-3)}}{\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\\&=\lim_{x\to 3}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.8

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{5x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{5(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{5}=-\frac{2}{5}$$

Aufgabe 1.9

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{x^3-9x^2+23x-15}{x-5}&\overset{*}{=}\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-4x+3)(x-5)}{x-5}\\&=\lim_{x\to 5}(x^2-4x+3)=8\end{aligned}$$

* Mit dem Horner-Schema den Zähler durch $(x-5)$ dividieren:

		-9	23	-15
5	1	-4	3	0

Also: $(x^3-9x^2+23x-15)=(x^2-4x+3)(x-5)$

Aufgabe 1.10

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{(x-2)^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

* Mit dem Horner-Schema den Zähler zweimal durch $(x-2)$ dividieren:

		-3	0	4
2	1	-1	-2	0
2	1	1	0	

Also: $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$

Aufgabe 1.11

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^2+2x-1}{x^4-2x^3+1}\overset{*}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x^3-x^2-x-1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x+1}{x^3-x^2-x-1}$$
$$=\frac{2}{-2}=-1$$

* Mit dem Horner-Schema Zähler und Nenner durch $(x-1)$ teilen:

		0	-2	2	-1
1	1	1	-1	1	0

Also: $x^4-2x^2+2x-1=(x-1)(x^3+x^2-x+1)$

		-2	0	0	1
1	1	-1	-1	-1	0

Also: $x^4-2x^3+1=(x-1)(x^3-x^2-x-1)$

Aufgabe 1.12

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$$
$$=\lim_{x\to 7}(\sqrt{x}+\sqrt{7})=2\sqrt{7}$$

Aufgabe 1.13

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+3)-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

* Erweitern mit Hilfe der dritten binomischen Formel

Aufgabe 1.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right) \overset{*}{=} 2+1=3$$

* PAM-Formelsammlung S. 62 (spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.15

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin x} \overset{*}{=} \lim_{x\to \pi}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to\pi} 2\cos x = -2$$

* PAM-Formelsammlung S. 99

Aufgabe 1.16

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right) \overset{*}{=} 2\cdot 1\cdot\cos 0 = 2$$

* PAM-Formelsammlung S. 62 (spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.17

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos x-\cos\pi}{x-\pi} \overset{*}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{-2\sin([x+\pi]/2)\sin([x-\pi]/2)}{x-\pi}$$
$$= \lim_{x\to\pi}\frac{-\sin([x+\pi]/2)\sin([x-\pi]/2)}{[x-\pi]/2}$$
$$= \lim_{x\to\pi}\left(-\sin([x+\pi]/2)\cdot\frac{\sin([x-\pi]/2)}{[x-\pi]/2}\right)$$
$$\overset{**}{=} -\sin(\pi)\cdot 1 = -0\cdot 1 = 0$$

* PAM-Formelsammlung S. 99 (Summen und Produkte)

** PAM-Formelsammlung S. 62 (Spezielle Grenzwerte)

Aufgabe 1.18

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Aufgabe 1.19

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} = 0$$

Aufgabe 1.20

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty \qquad \text{(divergent)}$$

Aufgabe 1.21

$$\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$$

Aufgabe 1.22

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{(divergent)}$$

Aufgabe 1.23

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1/x^2+1}{1/x^3+1} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1/x^2+1)\cdot x^3}{(1/x^3+1)\cdot x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{1+x^3} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{(konvergent)}\end{aligned}$$

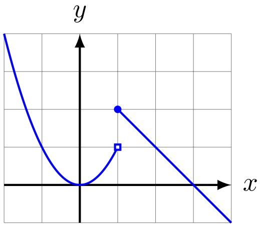
Aufgabe 1.24

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \text{(divergent)}$

Aufgabe 1.25

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3-x) = 2$

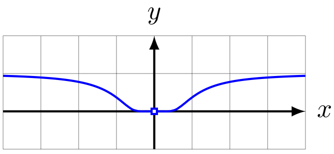
links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein $\Rightarrow$ *divergent*



Aufgabe 1.26

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0$

links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein $\Rightarrow$ *Grenzwert existiert.*



Aufgabe 1.27

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = \infty$$

Aufgabe 1.28

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty$$

Aufgabe 1.29

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$

Aufgabe 1.30

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty$$

Aufgabe 1.31

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x \quad \text{existiert nicht}$$

Aufgabe 1.32

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Aufgabe 1.33

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Aufgabe 1.34

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

Aufgabe 1.35

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+2}{3-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2/x}{3/x-2} = \frac{4+0}{0-2} = -2$$

Aufgabe 1.36

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+x-3x^2}{5x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2/x^2+1/x-3}{5-2/x+1/x^2} = -\frac{3}{5}$$

Aufgabe 1.37

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+2/x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x+2/x) = \infty$$

Aufgabe 1.38

- Nullstelle des Nenners: $x = 1$ (vertikale Asymptote)
- Polynomdivsion: $\begin{array}{c|c|c} & & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \end{array}$

  $(x+2) : (x-1) = 1 + \dfrac{3}{x-1}$

  $f(x) \approx 1$, wenn $|x|$ gross ist

Aufgabe 1.39

- Nullstelle des Nenners: $x = -2$ ist vertikale Asymptote

- Polynomdivsion: $\begin{array}{c|c|cc} & & 3 & -4 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -6 \end{array}$

  $(x^2 + 3x - 4) : (x + 2) = x + 1 - \dfrac{6}{x + 2}$

  $f(x) \approx x + 1$ wenn $|x|$ gross ist.